

*Ушакова М. А.*

*к.п.н, доцент*

*Нижнетагильский филиал*

*ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования»*

*г. Нижний Тагил*

## **ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

### **Аннотация**

В статье автор демонстрирует возможности применения программы GeoGebra для построения чертежей к задачам на уроках геометрии в школе.

**Ключевые слова:** круглые тела, сечения, GeoGebra, информационно-коммуникационные технологии.

*Ushakova M.A.*

*Ph.D., Associate Professor*

*Nizhny Tagil branch*

*GAOU DPO SO "Institute for Education Development"*

*Nizhny Tagil*

## **THE USE OF GRAPHIC PACKS IN HIGH SCHOOL MATHS LESSONS**

### **Annotation**

In the article, the author demonstrates the possibility of using the GeoGebra program for constructing drawings for problems in geometry lessons at school.

**Keywords:** round bodies, sections, GeoGebra, information and communication technologies.

Сегодня ни у кого не вызывает сомнения необходимость использования возможностей информационно-коммуникационных технологий на уроках в целом и на уроках математики в частности. Современные ученики привыкли, что их окружают современные технологии, что они применяются во всех сферах их жизнедеятельности, поэтому не использовать их в образовательной деятельности просто недопустимо.

Широкие возможности нам даёт применение онлайн математических редакторов. Одним из таких редакторов является GoeGebra – бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете. Эта программа предоставляет широчайшие возможности для иллюстрации различных математических понятий, закономерностей и объектов. Рассмотрим один из вариантов применения этой программы при изучении темы «Круглые тела» в 6 классе (учебник Е.А. Бунимовича). В одном из заданий учащимся надо построить цилиндр и его сечения и определить, какая фигура будет

получаться в сечении. Мы предлагаем рассмотреть, как это задание можно выполнить, используя GeoGebra.

Построения будем выполнять в редакторе 3D. Для перехода к 3D графике нужно выбрать вверху пункт «Вид» и в всплывающем списке выбрать «3D графика».

1. Используя инструмент «Цилиндр», строим цилиндр, задав сначала две его точки – центр верхнего основания и центр нижнего основания, а затем введя в диалоговом окне его радиус.

2. Далее по двум точкам строим три прямые, которые будут проходить через центр верхнего основания цилиндра (первая точка) и любую точку на боковой поверхности цилиндра (вторая точка).

3. После этого на полученных прямых указываем три произвольные точки.

4. Следующим шагом строим плоскость, проходящую через три точки, используя точки, построенные на предыдущем шаге. Получили сечение цилиндра.

5. Чтобы выделить полученное сечение, воспользуемся инструментом «Кривая пересечения» и укажем сам цилиндр и построенную про трём точкам плоскость.

Далее все дополнительные построения (точки, прямые и плоскость) можно скрыть. Получим цилиндр и его сечение плоскостью, проходящей через точки на его боковой поверхности (рис. 1).

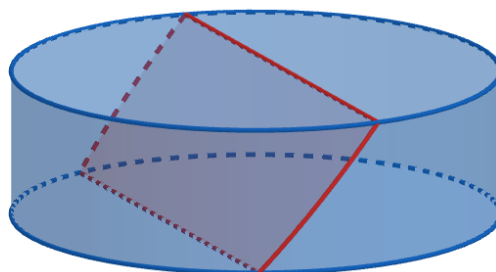


Рис. 1. Сечение цилиндра

Чтобы рассмотреть сечение с разных сторон можно воспользоваться инструментом «Вращать чертёж».

Для изменения формы сечения достаточно перемещать одну или несколько точек, по которым мы ранее построили секущую плоскость (рис. 2).

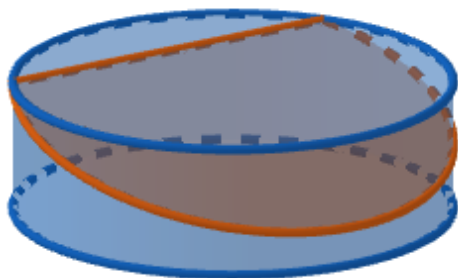







Рис. 2. Другой вариант сечения




Таким образом, не выполняя каждый раз построений заново, мы можем изучить все возможные варианты сечения конуса плоскостью, что очень сильно экономит время урока.

Естественно, мы не отрицаем необходимость выполнения построений в тетради, но, когда важно рассмотреть несколько вариантов, здесь гораздо более эффективно будет использовать возможности информационно-коммуникационных технологий.

Приведём ещё несколько примеров использования GeoGebra при решении геометрических задач, в частности, при выполнении чертежей к задачам

Пример 1. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 4. Найдите его большую сторону.

Для построения параллелограмма в системе GeoGebra нет специального инструмента, поэтому будем строить параллелограмм, как плоскость, ограниченную двумя парами параллельных прямых. Сначала отметим две произвольные точки с помощью инструмента «Точка» . Обозначим их  $A$  и  $X$ . Проведем прямую, проходящую через две эти точки, с помощью инструмента «Прямая» . Далее отметим еще одну произвольную точку  $B$ , не лежащую на построенной прямой. С помощью инструмента «Прямая» проведем прямую  $AB$ . Через точку  $B$  проведем прямую, параллельную прямой  $AX$ , с помощью инструмента «Параллельная прямая» . Для этого после выбора инструмента указываем сначала точку  $B$ , а затем прямую  $AX$  (щелкаем в любом месте прямой). Далее построим биссектрисы углов, прилежащих к стороне  $AB$ . Для этого воспользуемся инструментом «Биссектриса угла» . Построение биссектрисы происходит после указания прямых, образующих стороны угла. Далее находим точку пересечения нужных нам биссектрис, используя инструмент «Пересечение» . Для этого щелкаем сначала по одной биссектрисе, затем по другой. Полученную точку переименуем, щелкнув по ней правой клавишей мыши и выбрав пункт «Переименовать», и назовем ее  $M$ .

Осталось через точку  $M$  провести прямую, параллельную прямой  $AB$ , с помощью уже использованного ранее инструмента «Параллельная прямая» и найти точки пересечения этой прямой с прямой  $AD$  и параллельной ей прямой, проходящей через точку  $B$  (используем инструмент «Пересечение»). Далее, используя инструмент «Многоугольник» , прощелкиваем по порядку точки  $A, B, C, D, A$ . Чтобы скрыть понадобятся нам дополнительные построения, можно воспользоваться панелью объектов, которая расположена в левой части экрана. Чтобы скрыть объект, нужно щелкнуть левой клавишей мыши по маркеру, находящемуся левее названия объекта . Однако следует учесть, что, если скрыть прямые, образующие биссектрисы, то чертеж будет неполным. Прежде, чем скрыть биссектрисы, можно построить отрезки  $AM$  и  $BM$  с помощью инструмента «Отрезок» .

В итоге получим следующий чертеж (рис. 3).

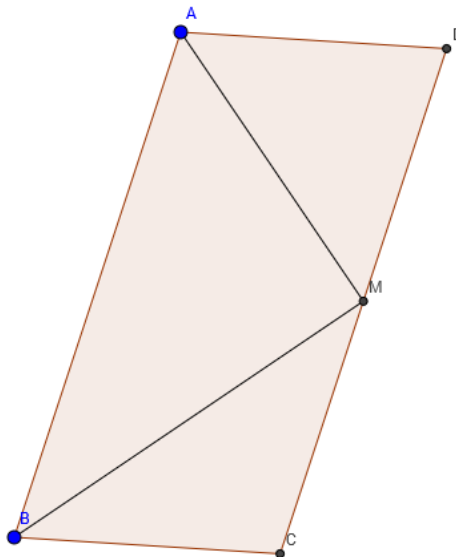




Рис. 3. Чертеж к примеру 1

Построенный таким образом чертеж является динамическим, т. е. его можно изменять, перемещая точки  $A$  или  $B$ . Таким образом можно «подобрать» положение точки  $A$  так, чтобы длина меньшей стороны была равна 4 (значение длины отображается на панели объектов справа от названия самого объекта (в нашем случае это отрезок  $a$ ). Добившись нужной длины отрезка, мы видим, что длина второй стороны равна 8. Это можно использовать для проверки аналитически найденного значения.

Пример 2. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Построить сечение, определяемое параллельными прямыми  $AA_1$  и  $CC_1$ .

Для построения четырехугольного параллелепипеда нам понадобится параллелограмм, который будет являться его основанием. Построение параллелограмма можно выполнить, частично воспользовавшись способом, описанным в первом примере. Сначала отмечаем три произвольные точки  $A, B$

и  $C$ . Затем проводим прямые, проходящие через точки  $A$  и  $B$  и через точки  $A$  и  $C$ . Строим прямую, параллельную прямой  $AB$ , проходящую через точку  $C$ , и прямую, параллельную прямой  $BC$ , проходящую через точку  $A$ . Далее находим точку пересечения полученных прямых и строим многоугольник по точкам  $ABCD$ . После этого скрываем прямые, оставляя только полученный параллелограмм  $ABCD$ . Чтобы получить верхнее основание параллелепипеда, воспользуемся инструментом «Параллельный перенос по вектору»  и укажем сначала параллелограмм, являющийся нижним основанием, затем точку  $A$  и произвольную точку, смещенную правее и выше относительно точки  $A$ . Получаем верхнее основание. Переименовываем точки  $A', B', C', D'$  в точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  соответственно, щелкнув поочередно по точкам правой клавишей мыши, выбрав пункт «Переименовать» и задав названия  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$ . После этого остается соединить с помощью инструмента «Отрезок» одноименные вершины и параллелепипед построен. Для повышения наглядности чертежа можно сделать невидимые линии пунктирными. Для этого щелкаем правой клавишей мыши по стороне  $AB$ , выбираем пункт «Свойства» и на вкладке «Стиль» выбираем нужный нам пунктирный стиль линии . Параллелепипед построен, причем, перемещая различные его точки, мы можем легко менять его форму, делая, тем самым, чертеж легко читаемым.

Осталось построить сечение, определяемое параллельными прямыми  $AA_1$  и  $CC_1$ . Эти прямые являются ребрами параллелепипеда, следовательно, они параллельны, а через две параллельные прямые проходит единственная плоскость и это плоскость – плоскость  $AA_1C_1C$ . Строим многоугольник, прощелкивая поочередно точки  $AA_1C_1C$ . У получившегося параллелограмма желательно поменять цвет заливки. Для этого необходимо щелкнуть правой клавишей мыши по параллелограмму и выбрать пункт «Свойства». Далее на вкладке «Цвет» выбираем любой, понравившийся цвет, желательно не яркий (рис. 4).

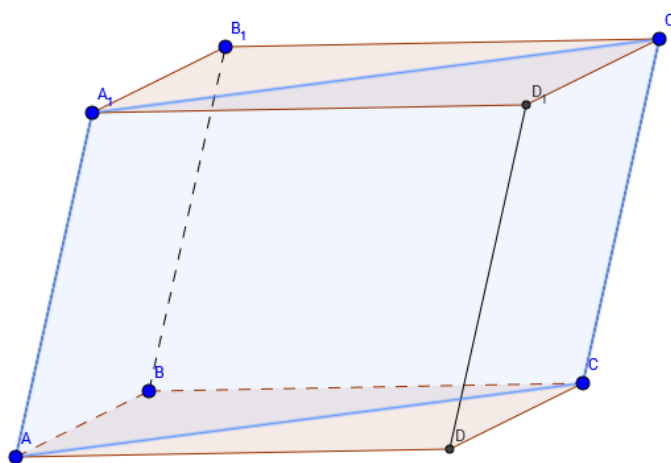


Рис. 4. Чертеж к примеру 2

Пример 3. Рассмотрим задание из демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2016 года по математике (профильный уровень).







Задание 16. Две окружности касаются внешним образом в точке  $K$ . Прямая  $AB$  касается первой окружности в точке  $A$ , а второй – в точке  $B$ . Прямая  $BK$  пересекает первую окружность в точке  $D$ , прямая  $AK$  пересекает вторую окружность в точке  $C$ .

а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BC$  параллельны.

б) Найдите площадь треугольника  $AKB$ , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

В контексте нашей статьи мы рассмотрим лишь непосредственно этап построения чертежа к задаче в системе GeoGebra, опустив само её решение.

В этом примере мы также воспользуемся онлайн редактором. После его запуска и выбора раздела Start GeoGebra, в диалоговом окне выбираем раздел «Геометрия».

Выполнение чертежа начнём с построения первой окружности. Для этого выбираем инструмент построения окружности по центру и точке  в блоке построения окружностей. Центр и точку на окружности выбираем произвольно. Далее можно построить прямую, проходящую через две точки (центр первой окружности  $O_1$  и точку на ней  $K$ ). После этого строим вторую окружность тем же инструментом, что и первую, задав её центр, лежащим на прямой  $O_1K$ , а точку окружности – точку  $K$ . Таким образом мы построили две окружности, касающиеся внешним образом в точке  $K$ . Для построения касательной к обеим окружностям воспользуемся инструментом «Касательная» . Выбрав этот инструмент, щёлкаем сначала по первой окружности, затем по второй. Система при этом построит три прямые, которые касаются обеих окружностей. Лишние прямые можно скрыть, используя инструмент «Показать / Скрыть» . Для обозначения точек касания воспользуемся инструментом «Пересечение»  – выделяем сначала касательную, а затем первую окружность. Аналогично поступаем со второй окружностью. Получили точки  $A$  и  $B$ . Далее необходимо построить прямые  $BK$  и  $AK$  и найти их точки пересечения с окружностями. Для этого используем инструмент «Прямая» , который строит прямую по двум точкам. Указываем щелчком точку  $B$ , затем точку  $K$ , получаем прямую  $BK$ . Аналогично получаем прямую  $AK$ . Находим точки пересечения этих прямых с окружностями, используя уже известный нам инструмент «Пересечение». Осталось только провести прямые  $AD$  и  $BC$ , параллельность которых требуется доказать в задаче. Для этого воспользуемся инструментом «Отрезок» , задав сначала точки  $A$  и  $D$ , а затем  $B$  и  $C$ . В итоге получаем следующий чертёж (рис. 5).

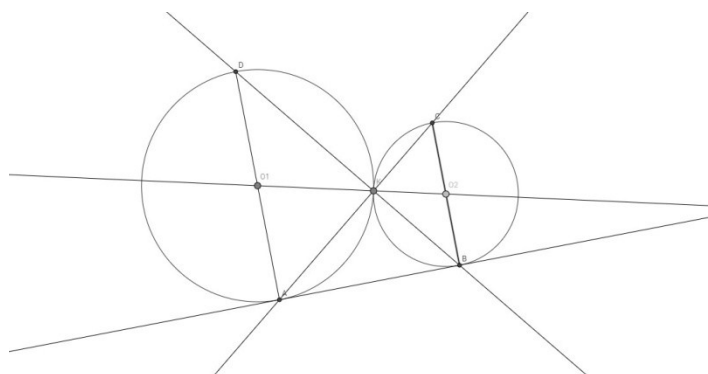



Рис. 5. Чертёж к задаче 16 (ЕГЭ–2016)

Для решения задачи можно выполнить некоторые дополнительные построения уже известными инструментами (рис. 6). Для построения перпендикуляра из точки  $O_2$  к прямой  $AD$  мы воспользовались инструментом «Перпендикулярная прямая»  и указали сначала точку  $O_2$ , а затем прямую  $AD$ .

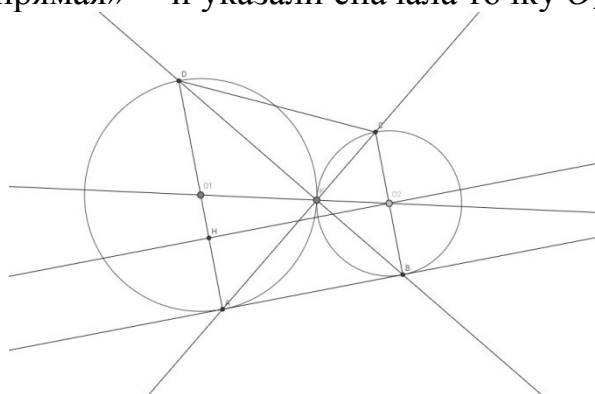


Рис. 6. Чертёж с дополнительными построениями

Система GeoGebra позволяет сохранять выполненные проекты на локальный диск в виде рисунков (png), собственных файлов системы (ggb) или анимированной картинке (gif). Также можно сохранить проект в интернете, сделав его либо общедоступным, либо доступным только тем, у кого есть ссылка, либо только для личного пользования. В дальнейшем сохранённый проект можно встраивать в собственные веб-страницы (например, сообщение блога или электронное портфолио).

Таким образом, использование ИКТ на уроках математики (впрочем, как и на любых других уроках), должно быть оправдано потребностями конкретной темы, оно должно быть уместно и обдуманно учителем. Только в этом случае мы получим положительный эффект от их применения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. GeoGebra Math Apps [Электронный ресурс]. URL: <http://www.geogebra.org/> (дата обращения 01.06.2018).
2. Введение в GeoGebra версии 4.2 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/tex/intro-ru%20Geo%20Gebra.pdf> (дата обращения 15.05.2018).

3. Компьютерное обучение геометрии [Электронный ресурс]. URL: <http://3d-geometry.ru/> (дата обращения 02.06.2018).

4. Конструируем геометрические чертежи [Электронный ресурс]. URL: <http://progeogebra.weebly.com/9658105010861085108910901088109110801088109110771084-10751077108610841077109010881080109510771089108210801077-1095107710881090107710781080.html> (дата обращения 02.06.2018).